## CHUYÊN ĐỀ 6. MẶT NÓN, MẶT CẦU, MẶT TRỤ

## BÀI 3: MẶT CẦU – KHỐI CẦU

**Mục tiêu**

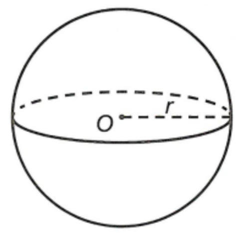
❖ **Kiến thức**

+ Nắm được các trường hợp giao của mặt cầu với mặt phẳng, giao của mặt cầu với đường thẳng, vị trí của một điểm với mặt cầu.
+ Nắm vững công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

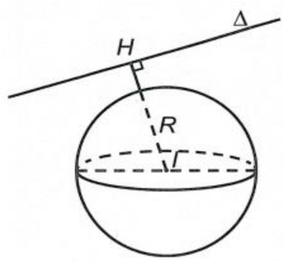
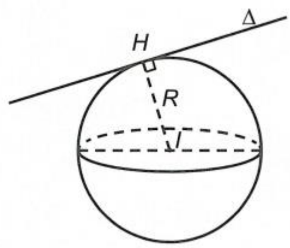
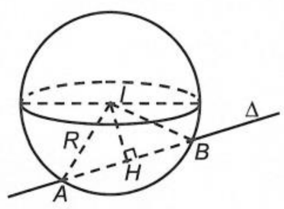
❖ **Kĩ năng**

+ Biết vẽ hình trong từng bài toán cụ thể.
+ Biết tính bán kính, diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu.
+ Giải được các bài toán liên quan đến khối cầu như bài toán tương giao với đường thẳng hay mặt phẳng, bài toán cực trị, bài toán thực tế...

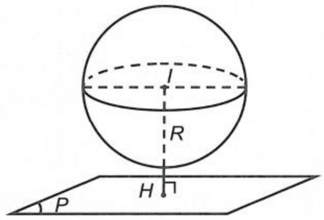
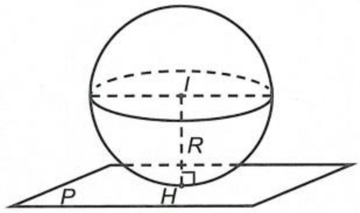
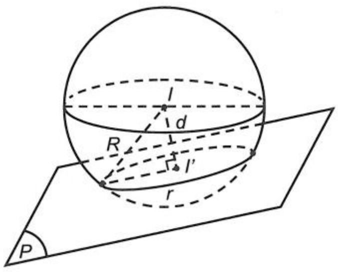
## I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

| | |
|---|---|
| **Định nghĩa**<br>- Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm $O$ cố định một khoảng $R$ không đổi gọi là mặt cầu tâm $O$, bán kính $R$, kí hiệu là: $S(O;R)$. Khi đó $S(O;R)=\{M \mid OM=R\}$.<br>- Khối cầu hay hình cầu $S(O;R)$ là tập hợp tất cả các điểm $M$ sao cho $OM \le R$.<br>**Vị trí tương đối giữa mặt cầu và một điểm**<br>Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm $A$. Nếu:<br>+) $OA=R$ thì điểm $A$ nằm trên mặt cầu $S(O;R)$.<br>+) $OA>R$ thì ta nói điểm $A$ nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$.<br>+) $OA<R$ thì ta nói điểm $A$ nằm trong mặt cầu $S(O;R)$. | Ta thường vẽ hay biểu diễn một mặt cầu hay khối cầu như hình sau:<br><br> |

**Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng**

| | |
|---|---|
| Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng $\Delta$. Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ lên $\Delta$ hay $d(I;\Delta)=IH$.<br>Nếu:<br>+) $IH>R:\Delta$ không cắt mặt cầu hay mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng $\Delta$ không có điểm chung. | <br> |
| +) $IH=R$ thì $\Delta$ với mặt cầu $S(I;R)$ có một điểm chung duy nhất là $H$. Ta nói $\Delta$ là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(I;R)$ và $H$ là tiếp điểm. | <br> |
| +) $IH<R:\Delta$ cắt mặt cầu $S(I;R)$ tại hai điểm phân biệt. | <br><br>***Nhận xét:***<br>+) $\Delta IAB$ cân tại $I$, điểm $H$ là trung điểm của $AB$ và $R^2=IH^2+AH^2=IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$. |

**Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng**

| | |
|---|---|
| Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng $(P)$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(P)$ hay $d(I;(P)) = IH$. Nếu:<br>+) $IH > R$: Mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng $(P)$ không có điểm chung. |  |
| +) Nếu $IH = R$: Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc mặt cầu $S(I;R)$. Lúc này ta nói mặt phẳng $(P)$ là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và $H$ là tiếp điểm. | <br>***Lưu ý***: $IH \perp (P)$ |
| +) Nếu $IH < R$: Mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm $I'(I' \equiv H)$ và bán kính<br>$r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{R^2 - I'I^2}$. | <br>***Nhận xét:*** Đường tròn giao tuyến có diện tích lớn nhất khi mặt phẳng $(P)$ đi qua tâm $I$ của mặt cầu $S(I;R)$. Đường tròn này ta gọi là đường tròn lớn. |

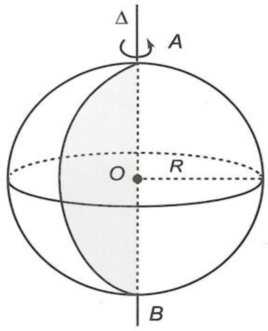
**Công thức cần nhớ**

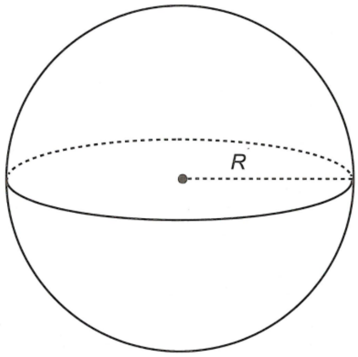
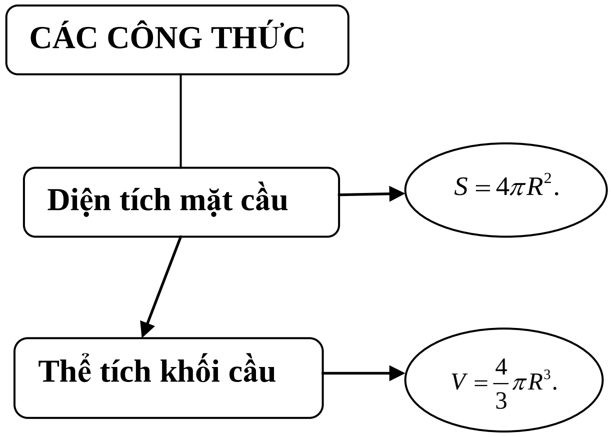
Cho mặt cầu $S(I;R)$.

- Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

**SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA**

| | |
|---|---|
| **MẶT CẦU**<br>Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm $O$ cố định một khoảng $R$ không đổi gọi là mặt cầu tâm $O$, bán kính $R$.<br>Kí hiệu: $S(O;R) = \{M \mid OM = R\}$. |  |

| MẶT CẦU – KHỐI CẦU | |
|---|---|
|  |  |

**II. CÁC DẠNG BÀI TẬP**

**Dạng 1. Câu hỏi lí thuyết về mặt cầu, khối cầu**

- **Phương pháp giải**

Cần nắm vững phần kiến thức trọng tâm ở trên

**Ví dụ:** Cho hình cầu có bán kính *R*. Khi đó thể tích khối cầu là

**A.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **B.** $\frac{2}{3}\pi R^3$. **C.** $\frac{1}{3}\pi R^3$. **D.** $4\pi R^3$.

***Hướng dẫn giải***

Từ công thức tính thể tích của khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ta suy ra đáp án.

***Chọn A.***

- **Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Diện tích mặt cầu có bán kính *R* là

**A.** $4\pi R^2$. **B.** $4\pi R^3$. **C.** $\frac{4}{3}\pi R^2$. **D.** $\frac{4}{3}\pi R^3$.

***Hướng dẫn giải***

Từ công thức tính diện tích của mặt cầu $S = 4\pi R^2$ ta suy ra đáp án.

***Chọn A.***

**Ví dụ 2.** Từ một điểm *M* nằm ngoài mặt cầu $\mathrm{S}(O;R)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với mặt cầu?

**A.** Vô số. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

***Hướng dẫn giải***

Từ một điểm *M* nằm ngoài mặt cầu $\mathrm{S}(O;R)$ có thể kẻ được vô số tiếp tuyến với mặt cầu.

***Chọn A.***

***Chú ý:*** Nếu *M* nằm trên mặt cầu thì đáp án vẫn là vô số tiếp tuyến nhưng lúc này các tiếp tuyến đều nằm trên mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu tại *M*.

**Ví dụ 3.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.** Hình chóp đều luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

**B.** Hình lăng trụ đều luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

**C.** Hình hộp đứng luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

**D.** Hình chóp tam giác luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

***Hướng dẫn giải***

Đáy của hình hộp đứng không nội tiếp trong một đường tròn khi đáy của nó là hình bình hành (không phải các trường hợp đặc biệt như hình chữ nhật hay hình vuông) và khi đó hình hộp đứng không có mặt cầu ngoại tiếp.

***Chọn C.***

**Ví dụ 4.** Cho mặt cầu có tâm, bán kính. Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có bán kính. Kết luận nào sau đây sai?

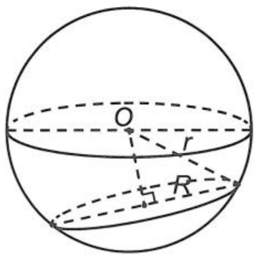
**A.** $R=\sqrt{r^2+d^2\left(O,(\alpha)\right)}$.

**B.** $d\left(O,(\alpha)\right)<r$.

**C.** Diện tích của mặt cầu là $S=4\pi r^2$.

**D.** Đường tròn lớn của mặt cầu có bán kính bằng bán kính mặt cầu.

***Hướng dẫn giải***




Đáp án A sai vì $r=\sqrt{R^2+d^2\left(O,(\alpha)\right)}$.

***Chọn A.***

**Dạng 2. Tính bán kính, diện tích mặt, thể tích khối cầu. Bài toán tương giao của mặt cầu với đường thẳng hay mặt phẳng...**

**Phương pháp giải**

Nắm vững các công thức tính diện tích và thể tích. Nắm vững các trường hợp tương giao của mặt cầu với đường thẳng hay mặt phẳng để rồi vận dụng các kiến thức của phần quan hệ song song, quan hệ vuông góc, các hệ thức lượng trong tam giác... để giải các bài tập.

**Ví dụ:** Thể tích $V$ của khối cầu có bán kính $R=a\sqrt{3}$ là

**A.** $V=4\pi a^3\sqrt{3}$.

**B.** $V=12\pi a^3\sqrt{3}$.

**C.** $V=\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

**D.** $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^3=4\pi a^3\sqrt{3}$.

*Chọn A.*

**Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Một mặt cầu có diện tích xung quanh là π thì có bán kính bằng

**A.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

***Hướng dẫn giải***

$S_{mc} = 4\pi R^2 \Leftrightarrow 4\pi R^2 = \pi \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}.$

*Chọn C.*

**Ví dụ 2.** Diện tích *S* của một mặt cầu có bán kính $R = a\sqrt{6}$ là

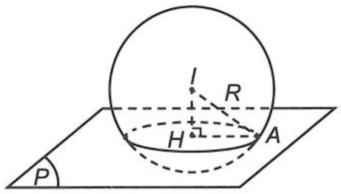
**A.** $S = 6\pi a^2$. **B.** $S = 24\pi a^2$. **C.** $S = 8\pi a^2$. **D.** $S = \pi a^2$.

***Hướng dẫn giải***

Diện tích của một mặt cầu có bán kính $R = a\sqrt{6}$ là

$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(a\sqrt{6}\right)^2 = 24\pi a^2.$

*Chọn B.*




**Ví dụ 3.** Khối cầu $\left(S_1\right)$ có thể tích bằng 54 $\text{cm}^3$ và có bán kính gấp 3 lần bán kính khối cầu $\left(S_2\right)$. Thể tích *V* của khối cầu $\left(S_2\right)$ là

**A.** $2\text{cm}^3$. **B.** $18\text{cm}^3$. **C.** $4\text{cm}^3$. **D.** $6\text{cm}^3$.

***Hướng dẫn giải***

Khối cầu $\left(S_1\right)$ có bán kính *R*. Khi đó khối cầu $\left(S_2\right)$ có bán kính $\frac{R}{3}$.

Từ giả thiết ta có $\frac{4}{3}\pi R^3 = 54$.

Do đó, thể tích khối cầu $\left(S_2\right)$ là $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{27}.54 = 2\left(cm^3\right)$.

*Chọn A.*

**Ví dụ 4:** Cắt mặt cầu (*S*) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 4cm ta được một thiết diện là đường tròn có bán kính bằng 3cm. Bán kính của mặt cầu (*S*) là

**A.** 10cm. **B.** 7cm. **C.** 12cm. **D.** 5cm.

***Hướng dẫn giải***

Bán kính mặt cầu (S) là

$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\left(cm\right)$. ***Chọn D.***

**Bài tập tự luyện dạng 2**

**Dạng 3. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện**

**Các khái niệm cần lưu ý:**

- **Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện:** là mặt cầu mà nó đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp cách đều tất cả các đỉnh của hình đa diện.

- **Trục của đa giác:** là đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác. Mọi điểm nằm trên trục thì cách đều các đỉnh của đa giác và ngược lại.

- **Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng:** Là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. Mọi điểm nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai điểm mút của đoạn thẳng và ngược lại.

**Phương pháp giải**

Đối với bài toán mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện thì mấu chốt của vấn đề là phải xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện đó. Khi xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp thì ta có thể tính được các yếu tố còn lại như bán kính, diện tích mặt cầu, thể tích của khối cầu...

**Ví dụ:** Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $2a, 4a, 4a,$ với $0 < a \in R.$ Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho bằng

**A.** $6a.$ **B.** $4a.$ **C.** $3a.$ **D.** $2a.$

***Hướng dẫn giải***

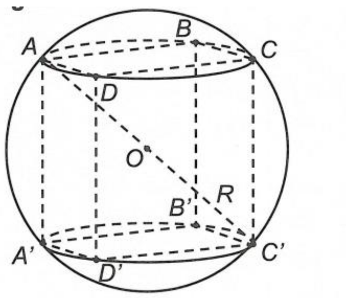
Giả sử hình hộp chữ nhật là *ABCD.A'B'C'D'*. Dễ thấy điểm *O* là trung điểm của *AC'* là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $R = OA.$

$R = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{(A'A)^2 + (A'C')^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(A'A)^2 + (A'D')^2 + (D'C')^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + (4a)^2 + (4a)^2} = 3a.$




***Chọn C.***

**Ví dụ mẫu**

***Cách 1. Tìm một điểm cách đều các đỉnh của khối đa diện theo định nghĩa mặt cầu***

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là điểm *I* với

**A.** *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SD*.

**B.** *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AC*.

**C.** *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SC*.

**D.** *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SB*.

***Hướng dẫn giải***

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

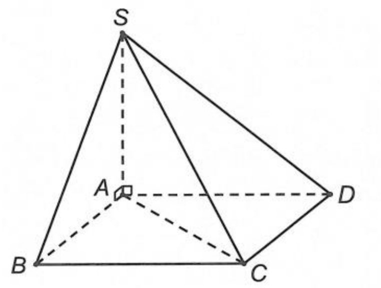
$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow SBC = 90^o \quad (1).$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$CD \perp SD \Rightarrow SDC = 90^o \qquad (2).$

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow SAC = 90^o \qquad (3).$




Từ (1), (2) và (3) suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là mặt cầu đường kính *SC* nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là trung điểm *I* của đoạn thẳng *SC*.

***Chọn C.***

**Ví dụ 2.** Cho khối chóp đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích *V* của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

**A.** $V = 3\pi a^3\sqrt{6}.$ **B.** $V = \pi a^3\sqrt{6}.$ **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$ **D.** $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$

***Hướng dẫn giải***

Vì *S.ABCD* là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

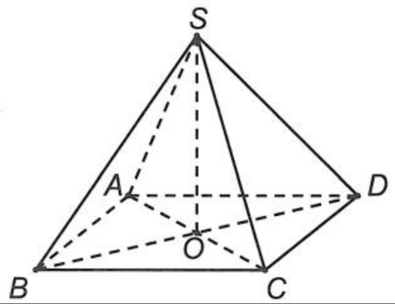
Ta có $OD = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$,

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$

Vậy $OS = OA = OD = OB = OC$, nên *O* là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD.

Vậy thể tích khối cầu cần tìm là $V = \dfrac{4}{3}\pi.SO^3 = \pi a^3\sqrt{6}$ (đvtt)

***Chọn B.***




***Lưu ý:***

Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp đều:

$$R = \frac{a^2}{2h}$$

với *a*: độ dài cạnh bên, *h*: chiều cao hình chóp.

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a.$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là

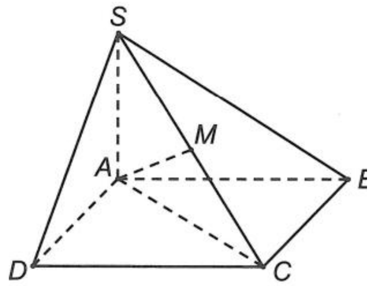
**A.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.  **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.  **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.  **D.** $a\sqrt{2}$.

***Hướng dẫn giải***

Chứng minh tương tự như ví dụ 2 ta được kết quả

$\Rightarrow$ Ba đỉnh *A*, *B*, *D* đều nhìn cạnh *SC* dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là trung điểm *SC* và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là $R=\frac{SC}{2}$.




Ta có *ABCD* là hình vuông cạnh *a* $\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác *SAC* vuông tại *A* có $SC=\sqrt{a^2+2a^2}=a\sqrt{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

***Chọn B.***

**Ví dụ 4.** Cho tứ diện *ABCD* có các mặt *ABC* và *BCD* là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (*ABD*) và (*ACD*) vuông góc với nhau. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* bằng

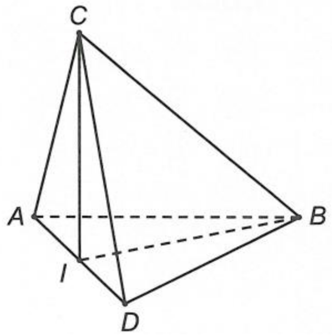
**A.** $2\sqrt{2}$.  **B.** $\sqrt{2}$.  **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.  **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có $\Delta ABC$, $\Delta BCD$ đều cạnh bằng 2 nên $AC=CD=2\Rightarrow\Delta ACD$ cân tại *C*.

Gọi *I* là trung điểm $AD\Rightarrow CI\perp AD$.

Lại có $\begin{cases}(ACD)\perp(ADB)\\(ACD)\cap(ADB)=AD\Rightarrow CI\perp(ABD)\\IC\perp AD\end{cases}$




$\Rightarrow CI\perp IB\left(do\, IB\subset(ABD)\right)$ (1)

Ta có $\Delta ACD=\Delta ABD(c.c.c)\Rightarrow CI=IB$  $(2)$.

Từ (1) và (2) ta có *ACB* vuông cân tại $I\Rightarrow CB=IB\sqrt{2}\Rightarrow IB=\frac{CB}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=IC$.

$\Delta DIB$ vuông tại $I\Rightarrow ID=\sqrt{BD^2-IB^2}=\sqrt{2}\Rightarrow AD=2ID=2\sqrt{2}$.

Xét $\Delta ADB$ có $AB=DB=2; AD=2\sqrt{2}\Rightarrow\Delta ABD$ vuông tại *B*.

$\Rightarrow ABD=90^o\Rightarrow ACD=90^o$.

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* có đường kính là *AD* nên bán kính là $R=ID=\sqrt{2}$.

***Chọn B.***

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp *S.ABC* có $SA\perp(ABC)$, tam giác *ABC* vuông tại *B*. Biết $SA=4a, AB=2a, BC=4a$. Bán kính *R* của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

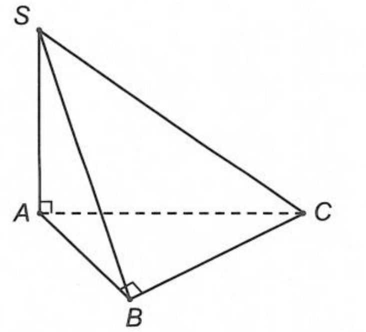
**A.** $3a$.  **B.** $2a$.  **C.** $a$.  **D.** $6a$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA\left(do\, SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$

Suy ra hai điểm *A*, *B* cùng nhìn *SC* dưới một góc vuông. Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* là trung điểm *SC*, bán kính mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$.




Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 + 16a^2 = 20a^2$

$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{16a^2 + 20a^2} = 6a$

$\begin{cases} (\alpha) // BD \\ (SBD) \cap (\alpha) = EF \end{cases} \Rightarrow BD // EF.$ Vậy $R = 3a.$

***Chọn A.***

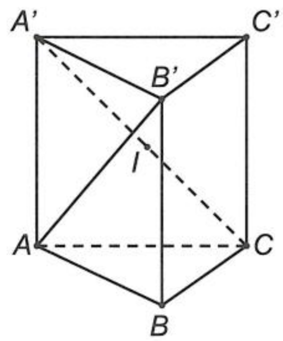
**Ví dụ 6:** Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại B, $AC = a\sqrt{3}, ACB = 30^o.$ Góc giữa đường thẳng *AB'* và mặt phẳng (*ABC*) bằng 60°. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *A'ABC* bằng

**A.** $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{8}$.

***Hướng dẫn giải***

Trong tam giác vuông *ABC* có $AB = AC.\sin 30^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $AB' \cap (ABC) = \{A\}$ và hình chiếu của *B* lên mặt phẳng (*ABC*) là *B* nên góc giữa đường thẳng *AB'* và mặt phẳng (*ABC*) bằng góc giữa hai đường thẳng *AB'* và *AB*, và bằng góc $B'AB$ (vì tam giác *AB'B* vuông tại *B*). Do đó $B'AB = 60^o$.




Trong tam giác vuông *AB'B* có

$BB' = AB.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}\tan 60^o = \frac{3a}{2}$.

Trong tam giác vuông *AA'C* có

$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}a.$

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, suy ra $BC \perp A'B$ hay $A'BC = 90^o$. Mà $A'AC = 90^o$, suy ra hai điểm *A*, *B* cùng nhìn *A'C* dưới một góc vuông.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *A'ABC* bằng $R = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{21}}{4}a.$

***Chọn A.***

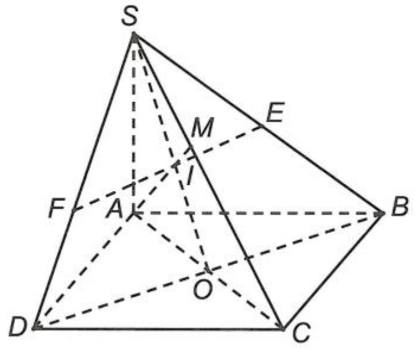
**Ví dụ 7.** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Gọi *M* là trung điểm cạnh *SC*. Mặt phẳng (α) qua *A* và *M* đồng thời song song với đường thẳng *BD* cắt *SB*, *SD* lần lượt tại *E*, *F*. Bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm *S*, *A*, *E*, *M*, *F* nhận giá trị nào sau đây?

**A.** $a$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

***Hướng dẫn giải***

Gọi *I* là giao điểm của *AM* và *SO*.

Dễ thấy *I* là trọng tâm tam giác *SAC* và *I*, *E*, *F* thẳng hàng.




Lại có $\frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SF = \frac{2}{3}SD$

$\Rightarrow SF.SD = \frac{2}{3}SD^2 = \frac{2}{3}\left(SA^2 + AD^2\right) = 2a^2$

$\Rightarrow SF.SD = SA^2$.

Xét tam giác vuông *SAD* có $SF.SD = SA^2 \Rightarrow AF$ là đường cao tam giác $AF \perp SF$.

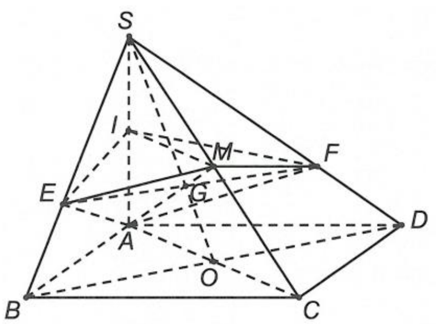
Chứng minh tương tự ta có $AE \perp SB$.

Tam giác $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên *AM* vừa là trung tuyến vừa là đường cao tam giác $AM \perp SC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp SM \\ AF \perp SF \\ AE \perp SE \end{cases}$ nên mặt cầu đi qua 5 điểm *S*, *A*, *E*, *M*, *F* có tâm là trung điểm *SA* và bán kính bằng $\frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

***Chọn C.***

***Chú ý:*** Ta có thể làm như sau




Do $EF = (\alpha) \cap (SBD)$ và $(\alpha) // BD$ nên $EF // BD$.

Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp SC$.

Tam giác *SAC* có $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên $AM \perp SC$.

Do đó $SC \perp (AMEF) \Rightarrow SC \perp AE \quad (1)$.

Lại có $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \qquad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB$.

Chứng minh tương tự, ta được $AF \perp SD$. Từ đây, suy ra kết quả như cách bên.

***Cách 2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên***

***Chú ý:*** Trong khuôn khổ bài tập thường xoay quanh hình chóp, hình lăng trụ nên đa giác đáy ta nói đến ở đây là đáy của hình chóp hay hình lăng trụ.

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Gọi (*S*) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*. Thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (*S*) bằng

**A.** $\frac{32\pi a^3}{81}$. **B.** $\frac{32\pi a^3}{77}$. **C.** $\frac{64\pi a^3}{77}$. **D.** $\frac{72\pi a^3}{39}$.

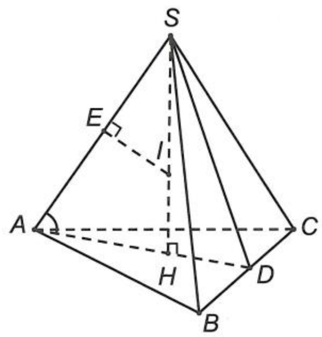
***Hướng dẫn giải***

Gọi *H* là tâm của tam giác *ABC*, *SH* là trục của đường tròn ngoại tiếp *ABC*, mặt phẳng trung trực của *SA* qua *E* là trung điểm của *SA* và cắt *SH* tại *I*. Khi đó *I* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*.

Xét trong tam giác *SAH* ta có

$$\mathrm{SH} = \mathrm{AH}.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^o = a; SA = \frac{SH}{\sin 60^o} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Xét hai tam giác đồng dạng $\Delta SEI$ và $\Delta SHA$




Ta có $\frac{SI}{SA} = \frac{SE}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA.SE}{SH} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{2\sqrt{3}}}{a} = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow R = \frac{2a}{3}$.

Suy ra thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (*S*) bằng $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{32\pi a^3}{81}$.

***Chọn A.***

**Ví dụ 2.** Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng *a*.

**A.** $\frac{7\pi a^2}{5}$. **B.** $\frac{7\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{7\pi a^2}{6}$. **D.** $\frac{3\pi a^2}{7}$.

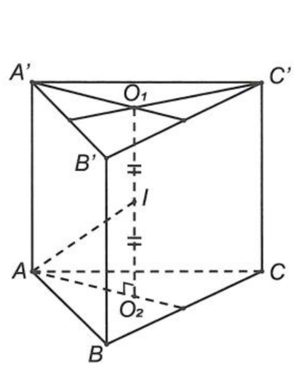
***Hướng dẫn giải***

Gọi $O_1$, $O_2$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy lăng trụ $\Rightarrow O_1O_2$ là trục đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đáy.

Gọi *I* là trung điểm của $O_1O_2 \Rightarrow IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$.

Suy ra trung điểm *I* của $O_1O_2$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Bán kính




$$R = IA = \sqrt{AO_2^2 + IO_2^2} = \sqrt{AO_2^2 + \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a.\sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng *a* là

$$S = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(a.\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \frac{7\pi a^3}{3}.$$

**Chọn B.**

| |
|---|
| ***Lưu ý:*** |
| Mặt phẳng trung trực của một cạnh bên cắt $O_1O_2$ tại $I$ là trung điểm của $O_1O_2$. |

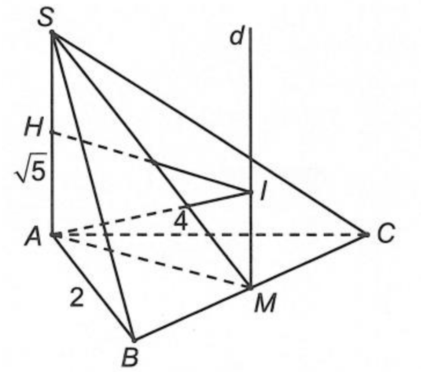
**Ví dụ 3.** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*) và $AB = 2, AC = 4, SA = \sqrt{5}.$ Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp *S.ABC* có bán kính là

**A.** $R = \frac{25}{2}.$ **B.** $R = \frac{5}{2}.$ **C.** $R = 5.$ **D.** $R = \frac{10}{3}.$

***Hướng dẫn giải***

Gọi *M*, *H* lần lượt là trung điểm của *BC*, *SA*

Ta có tam giác *ABC* vuông tại *A* suy ra *A* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Qua *M* kẻ đường thẳng *d* sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.




Trong mặt phẳng kẻ đường trung trực $\Delta$ của đoạn *SA*, cắt *d* tại *I*

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*. Dễ thấy tứ giác *HAMI* là hình chữ nhật.

Ta có

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5},$$

$$IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* là

$$R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$$

**Chọn B.**

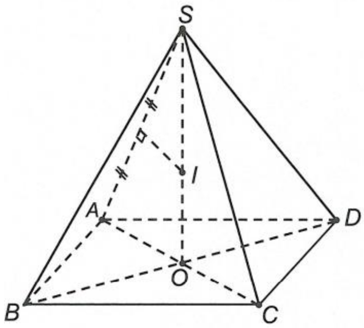
| |
|---|
| ***Lưu ý:*** có thể thay mặt phẳng trung trực của *SA* bằng đường trung trực của *SA* xét trong mặt phẳng (*SAM*). |

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh bằng *a*. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là

**A.** $a\sqrt{2}.$ **B.** $a.$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $2a.$

***Hướng dẫn giải***

Gọi $O$ là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$




Vậy $SO$ là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

Trong ($SAC$) gọi ($d$) là trung trực của $SA$ và $I$ là giao điểm của ($d$) với $SO$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SO) \\ I \in (d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IA = IS \end{cases}$$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS.$

Vậy $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AO^2}} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

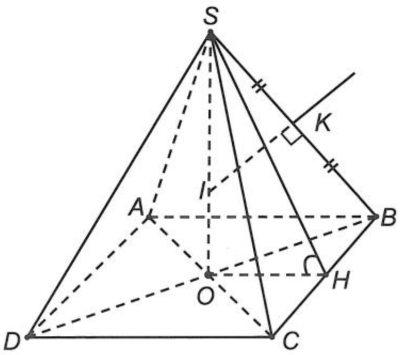
***Chọn C.***

**Ví dụ 5.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Diện tích $S_{mc}$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

**A.** $S_{mc} = \dfrac{25\pi a^2}{3}$. **B.** $S_{mc} = \dfrac{32\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{mc} = \dfrac{8\pi a^2}{3}$. **D.** $S_{mc} = \dfrac{a^2}{12}$.

***Hướng dẫn giải***

Trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là $SO$. Mặt phẳng trung trực của $SB$ cắt $SO$ tại $I$, cắt $SB$ tại $K$ thì $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.




Gọi $H$ là trung điểm $BC$ thì $\widehat{SHO} = 60^o$.

Xét tam giác vuông $SHO$, ta có

$\tan 60^o = \dfrac{SO}{OH} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}.$

Từ đó suy ra

$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{3a^2 + 2a^2} = a\sqrt{5}.$

Ta có $\Delta SKI \backsim \Delta SOB (g.g)$.

$$\Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow SI = \frac{SK.SB}{SO} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{5}.\frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{5a}{2\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \dfrac{75a^2}{36} = \dfrac{25\pi a^2}{3}.$

***Chọn A.***

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a\sqrt{2}$, cạnh bên $2a$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $SA, SB, SC, SD$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $ABCDMNPQ$.

**A.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

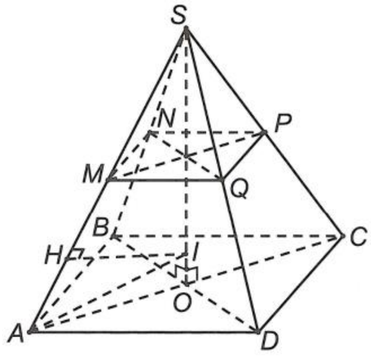
***Hướng dẫn giải***

Ta có $(ABCD)//(MNPQ)$. Gọi $\{O\}=AC\cap BD$.

Mà *S.ABCD* là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$. Nên *SO* là trục của hai đáy (*ABCD*) và (*MNPQ*).

Trong mặt phẳng *(SAO)* kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng *AM* cắt *SA, SO* tại *H, I*.

Khi đó *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCDMNPQ* và bán kính là *IA*.




Ta có $SA=SB=SC=SD=2a$

$AB=BC=CD=DA=a\sqrt{2}.$

Lại có $SH=\frac{3}{4}SA=\frac{3}{4}.2a=\frac{3a}{2}\Rightarrow HA=\frac{1}{4}SA=\frac{a}{2}.$

$\Rightarrow AC=AB\sqrt{2}=2a\Rightarrow AO=a\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=a\sqrt{3}.$

Mặt khác $\Delta SHI\backsim\Delta SOA(g.g)\Rightarrow\frac{HI}{OA}=\frac{SH}{SO}\Rightarrow HI=\frac{OA.SH}{SO}=\frac{a.\frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}.$

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R=AI=\sqrt{HI^2+HA^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a.$

***Chọn B.***

***Cách 3. Dựa vào trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên***

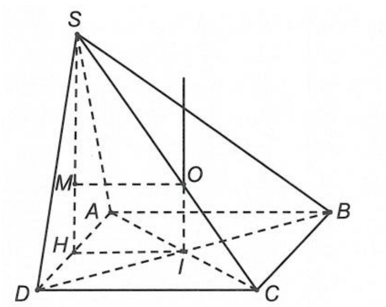
**Ví dụ 1.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, $AB=2a, BC=a$, hình chiếu của *S* lên mặt phẳng (*ABCD*) là trung điểm *H* của $AD, SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{16\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{16\pi a^2}{9}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\pi a^2}{3}$.

***Hướng dẫn giải***

Gọi *I* là giao điểm của *AC* và *BC*, qua *I* dựng đương thẳng *d* song song với $SH\Rightarrow d\perp(ABCD)$.

Gọi *M* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAD*, qua *M* kẻ đường thẳng *d'* vuông góc với *mp*(*SAD*), *d'* cắt *d* tại $O\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* và bán kính bằng $R=OS=\sqrt{MO^2+MS^2}$.




Với $OM=IH=\frac{AB}{2}=a, MS=r$ (*r* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAB*).

Lại có, $\Delta SAD$ cân tại *A*, cạnh $AD=a$, đường cao $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra tam giác *SAD* đều $r=AM=\frac{2}{3}SH=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow R^2=\frac{4a^2}{3}$ (*R* là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD*).

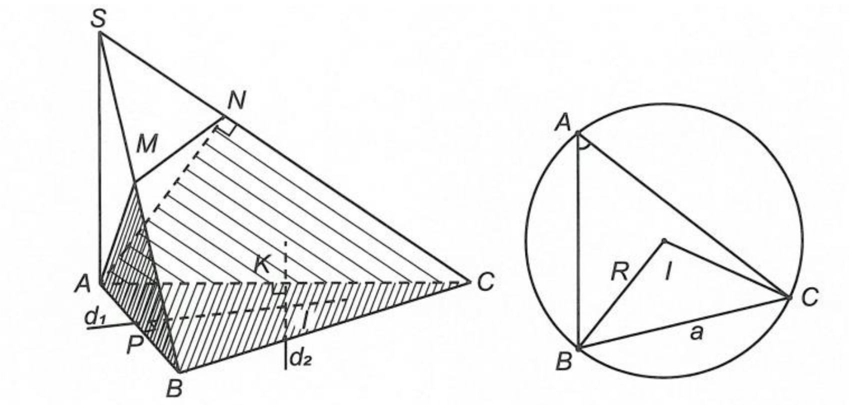
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* bằng $S = 4\pi R^2 = \dfrac{16\pi a^2}{3}.$

***Chọn A.***

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp *S.ABC* có $SA \perp (ABC).$ Gọi *M, N* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB, SC*. Biết $BAC = \alpha, BC = a.$ Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* là

**A.** $\dfrac{\pi}{\cos^2\alpha}a^2.$ **B.** $\dfrac{\pi}{\sin^2\alpha}a^2.$ **C.** $\dfrac{4\pi}{\cos^2\alpha}a^2.$ **D.** $\dfrac{4\pi}{\sin^2\alpha}a^2.$

***Hướng dẫn giải***




+) Gọi *K*, *P* lần lượt là trung điểm của *AC* và *AB*.

$\Delta ACN$ vuông tại $N \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACN$.

$\Delta ABM$ vuông tại $M \Rightarrow P$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABM$.

+) Hai mặt phẳng (*SAB*), (*ABC*) vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến *AB* nên gọi $d_1$ là trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABM$ thì $d_1$ qua $P, d_1 \subset (ABC)$ và $d_1 \perp AB.$ Tương tự, gọi $d_2$ là trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACN$ thì $d_2$ qua $K, d_2 \subset (ABC)$ và $d_2 \perp AC.$

+) Rõ ràng, trong mặt phẳng (*ABC*) thì $d_1 d_2$ lần lượt là đường trung trực của các cạch *AB*, *AC* nên hai đường này cắt nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$, bán kính *R* của mặt cầu này cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

+) Áp dụng định lí sin cho $\Delta ABC$ ta được $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}.$

Vây diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}.$

***Chọn B.***

***Lưu ý:***

Cách 2: Vẽ đường kính *AE* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Khi đó *A, M, N, B, C* cùng nhìn *AE* góc 90°.

Áp dụng định lí sin cho $\Delta ABC$ ta được

$R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{a}{2\sin\alpha}.$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là

$S=4\pi R^2=\dfrac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}.$

**Dạng 4. Mặt cầu nội tiếp khối đa diện**

Mặt cầu nội tiếp khối đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của khối đa diện.

**Phương pháp giải**

Xác định được và hiểu rõ khoảng cách từ tâm của mặt cầu nội tiếp khối đa diện tới các mặt của khối đa diện chính là bán kính của mặt cầu nội tiếp khối đa diện. Từ đó có thể tính được bán kính, diện tích xung quanh của mặt cầu, thể tích của khối cầu và giải được các bài toán liên quan.

**Ví dụ:** Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1 là

**A.** $\dfrac{\pi}{12}.$ **B.** $\dfrac{\pi}{3}.$ **C.** $\dfrac{2\pi}{3}.$ **D.** $\dfrac{\pi}{6}.$

***Hướng dẫn giải***

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có tâm trùng với tâm của hình lập phương và tiếp xúc với các mặt của hình lập phương tại tâm của các hình vuông là các mặt của hình lập phương.

Suy ra bán kính $\mathrm{R}=\dfrac{1}{2}.$

Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{\pi}{6}.$

***Chọn D.***

**Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp của hình lập phương đó bằng

**A.** $V=\dfrac{64\pi a^3}{3}.$ **B.** $V=\dfrac{8\pi a^3}{3}.$ **C.** $V=\dfrac{32\pi a^3}{3}.$ **D.** $V=\dfrac{16\pi a^3}{3}.$

***Hướng dẫn giải***

Hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$, suy ra cạnh hình lập phương là 4a.

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có bán kính bằng $\dfrac{1}{2}$ cạnh hình lập phương $\Rightarrow R=2a.$

Vậy $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi a^3}{3}.$

***Chọn C.***

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, AB=8, BC=6.$ Biết $SA=6$ và $SA$ vuông góc với $mp(ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$.

**A.** $\dfrac{16}{9}\pi.$ **B.** $\dfrac{625}{81}\pi.$ **C.** $\dfrac{256}{81}\pi.$ **D.** $\dfrac{25}{9}\pi.$

***Hướng dẫn giải***

Gọi $I$ và $r$ lần lượt là tâm và bán kính của hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$. Khi đó

$$V_{S.ABC}=V_{I.ABC}+V_{I.SBC}+V_{I.SAB}+V_{I.SAC}=\frac{1}{3}r\left(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta SAB}+S_{\Delta SBC}+S_{\Delta SAC}\right)=\frac{r.S_{TP}}{3}$$

$$\Rightarrow r=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}}.$$

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.6.\frac{1}{2}.8.6=48;$$

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta SAB}=24;S_{\Delta SBC}=S_{\Delta SAC}=30\Rightarrow S_{TP}=108.$$

Vậy $r=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}}=\frac{3.48}{108}=\frac{4}{3}\Rightarrow V_{mc}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{256}{81}\pi.$

***Chọn C.***